

Análisis de Algoritmos II

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Maestría en Ciencias de la Computación
Análisis y Diseño de Algoritmos
MCOM 20300

- 1 Motivación
- 2 Recurrencias homogéneas
- 3 Ejercicios
- 4 Asesorías

- El último paso indispensable en el análisis de algoritmos es saber resolver **ecuaciones de recurrencia** (como se ha visto en presentaciones anteriores).

- Con un poco de experiencia e intuición la mayoría de las recurrencias se pueden resolver haciendo *conjeturas inteligentes*.

- No obstante, existe una técnica poderosa que se puede usar para resolver ciertas clases de recurrencia casi automáticamente.

- Este es el tópico principal de esta presentación: la **técnica de la ecuación característica**.

Recurrencias homogéneas I

Empezaremos nuestro estudio de la **técnica de la ecuación característica** con la resolución de recurrencias lineales homogéneas con coeficientes constantes, es decir recurrencias de la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0 \quad (1)$$

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0 \quad (1)$$

- donde los t_i son los valores que estamos buscando.
- Además de la Ecuación (1), los valores de t_i sobre k valores de i (generalmente $0 \leq i \leq k - 1$ o $1 \leq i \leq k$) son necesarios para determinar la secuencia.
- Estas **condiciones iniciales** se considerarán más adelante. Hasta entonces, la Ecuación (1) normalmente tiene infinitas soluciones.

Recurrencias homogéneas II

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

Recurrencias homogéneas II

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

- lineal porque no contiene términos de la forma $t_{n-i}t_{n-j}$, t_{n-i}^2 , etc;

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

- lineal porque no contiene términos de la forma $t_{n-i} t_{n-j}$, t_{n-i}^2 , etc;
- homogénea porque las combinaciones lineales de las t_{n-i} son iguales a cero; y

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Esta recurrencia es:

- lineal porque no contiene términos de la forma $t_{n-i} t_{n-j}$, t_{n-i}^2 , etc;
- homogénea porque las combinaciones lineales de las t_{n-i} son iguales a cero; y
- con coeficientes constantes porque las a_i son constantes.

Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Esta recurrencia fácilmente se puede poner en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Esta recurrencia fácilmente se puede poner en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

después de hacer la reescritura obvia.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

Recurrencias homogéneas III

Considere nuestra ahora familiar recurrencia de la secuencia de Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Esta recurrencia fácilmente se puede poner en la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = 0$$

después de hacer la reescritua obvia.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

Por lo tanto, la secuencia de Fibonacci corresponde a una recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes, donde $k = 2$, $a_0 = 1$ y $a_1 = a_2 = -1$.

- Incluso antes de comenzar a buscar soluciones a la Ecuación (1), es interesante notar que cualquier combinación lineal de soluciones es en sí misma una solución.

- En otras palabras, si f_n y g_n satisfacen la Ecuación (1), entonces $\sum_{i=0}^k a_i f_{n-i} = 0$ y similarmente para g_n , si definimos $t_n = cf_n + dg_n$ para las constantes arbitrarias c y d , entonces t_n también es una solución de la Ecuación (1).

Esto es cierto porque

Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} =$$

Recurrencias homogéneas V

Esto es cierto porque

$$\begin{aligned} a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} &= \\ a_0 (c f_n + d g_n) + a_1 (c f_{n-1} + d g_{n-1}) + \cdots + a_k (c f_{n-k} + d g_{n-k}) &= \end{aligned}$$

Esto es cierto porque

$$\begin{aligned} a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} &= \\ a_0 (c f_n + d g_n) + a_1 (c f_{n-1} + d g_{n-1}) + \cdots + a_k (c f_{n-k} + d g_{n-k}) &= \\ c(a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}) + d(a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k}) &= \end{aligned}$$

Esto es cierto porque

$$\begin{aligned} a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} &= \\ a_0 (c f_n + d g_n) + a_1 (c f_{n-1} + d g_{n-1}) + \cdots + a_k (c f_{n-k} + d g_{n-k}) &= \\ c(a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}) + d(a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k}) &= \\ c \times 0 + d \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Esto es cierto porque

$$\begin{aligned} & a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = \\ & a_0 (c f_n + d g_n) + a_1 (c f_{n-1} + d g_{n-1}) + \cdots + a_k (c f_{n-k} + d g_{n-k}) = \\ & c (a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k}) + d (a_0 g_n + a_1 g_{n-1} + \cdots + a_k g_{n-k}) = \\ & c \times 0 + d \times 0 = 0. \end{aligned}$$

Esta regla se generaliza a combinaciones lineales de cualquier número de soluciones.

Recurrencias homogéneas VI

Buscamos soluciones de la forma

$$t_n = x^n$$

donde x es una constante aún desconocida.

Buscamos soluciones de la forma

$$t_n = x^n$$

donde x es una constante aún desconocida. Si sustituimos esta solución en la Ecuación (1), obtenemos

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} = 0$$

Recurrencias homogéneas VI

Buscamos soluciones de la forma

$$t_n = x^n$$

donde x es una constante aún desconocida. Si sustituimos esta solución en la Ecuación (1), obtenemos

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} = 0$$

Esta ecuación se satisface si $x = 0$, una solución trivial que no es de interés. De otra manera la ecuación se satisface si y sólo si

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

Esta ecuación de grado k en x se llama la **ecuación característica** de la recurrencia (1) y

$$p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

se llama su **polinomio característico**.

Recurrencias homogéneas VIII

Recuerde que el teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio $p(x)$ de grado k tiene exactamente k raíces (no necesariamente distintas), lo que significa que puede factorizarse como un producto de k monomios.

Recuerde que el teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio $p(x)$ de grado k tiene exactamente k raíces (no necesariamente distintas), lo que significa que puede factorizarse como un producto de k monomios.

$$p(x) = \prod_{i=1}^k (x - r_i),$$

Recurrencias homogéneas VIII

Recuerde que el teorema fundamental del álgebra establece que cualquier polinomio $p(x)$ de grado k tiene exactamente k raíces (no necesariamente distintas), lo que significa que puede factorizarse como un producto de k monomios.

$$p(x) = \prod_{i=1}^k (x - r_i),$$

donde las r_i pueden ser números complejos. Aún más, estas r_i son las únicas soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

- Considere cualquier raíz r_i del polinomio característico.

- Como $p(r_i) = 0$ se deduce que $x = r_i$ es una solución a la ecuación característica y, por lo tanto, r_i^n es una solución de la recurrencia.

- Dado que cualquier combinación lineal de soluciones también es una solución, concluimos que

$$t_n = \sum_{i=1}^k c_i r_i^n \quad (2)$$

satisface la recurrencia para cualquier elección de constantes c_1, c_2, \dots, c_k .

- El hecho notable, que no probamos aquí, es que la Ecuación (1) sólo tiene soluciones de esta forma siempre que todas las r_i sean distintas.

- En este caso, las k constantes se pueden determinar a partir de k condiciones iniciales resolviendo un sistema de k ecuaciones lineales con k incógnitas.

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 1 Primero reescribimos esta recurrencia en la forma de la Ecuación 1.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 1 Primero reescribimos esta recurrencia en la forma de la Ecuación 1.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

- 2 Por lo tanto su polinomio característico es

$$x^2 - x - 1$$

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1 (Fibonacci)

Considere la recurrencia

$$f_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0 \text{ o } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 1 Primero reescribimos esta recurrencia en la forma de la Ecuación 1.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

- 2 Por lo tanto su polinomio característico es

$$x^2 - x - 1$$

- 3 cuyas raíces son

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ejemplo 1 II

- 4 Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (3)$$

Ejemplo 1 II

- 4 Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (3)$$

- 5 Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 .

Ejemplo 1 II

- 4 Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (3)$$

- 5 Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 .
- 6 Cuando $n = 0$, la Ecuación (3) nos da $f_0 = c_1 + c_2$. Pero sabemos que $f_0 = 0$. Por lo tanto, $c_1 + c_2 = 0$.

Ejemplo 1 II

- 4 Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (3)$$

- 5 Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 .
- 6 Cuando $n = 0$, la Ecuación (3) nos da $f_0 = c_1 + c_2$. Pero sabemos que $f_0 = 0$. Por lo tanto, $c_1 + c_2 = 0$.
- 7 Similarmente cuando $n = 1$, la Ecuación (3) junto con la segunda condición inicial nos dice que $f_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1$.

Ejemplo 1 II

- 4 Por lo tanto la solución general es de la forma

$$f_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (3)$$

- 5 Falta usar las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 .
- 6 Cuando $n = 0$, la Ecuación (3) nos da $f_0 = c_1 + c_2$. Pero sabemos que $f_0 = 0$. Por lo tanto, $c_1 + c_2 = 0$.
- 7 Similarmente cuando $n = 1$, la Ecuación (3) junto con la segunda condición inicial nos dice que $f_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1$.
- 8 Recordando que los valores de r_1 y r_2 son conocidos, esto nos da dos ecuaciones lineales con las incógnitas c_1 y c_2 .

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 & n &= 0 \\ r_1 c_1 + r_2 c_2 &= 1 & n &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1 III

- 9 Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ejemplo 1 III

- 9 Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

- 10 Así

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Ejemplo 1 III

- 9 Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ y } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

- 10 Así

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Note que hemos obtenido la famosa fórmula de de Moivre para la secuencia de Fibonacci.

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 1 Primero reescribimos la recurrencia

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0.$$

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 1 Primero reescribimos la recurrencia

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0.$$

- 2 Su polinomio característico es

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4).$$

Ejemplo 2

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 3t_{n-1} + 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- 1 Primero reescribimos la recurrencia

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0.$$

- 2 Su polinomio característico es

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4).$$

- 3 Cuyas raíces son $r_1 = -1$ y $r_2 = 4$.

- 4 La solución por tanto es de la forma

$$t_n = c_1(-1)^n + c_24^n.$$

- 4 La solución por tanto es de la forma

$$t_n = c_1(-1)^n + c_24^n.$$

- 5 Las condiciones iniciales dan

$$\begin{array}{ll} c_1 + c_2 = 0 & n = 0 \\ -c_1 + 4c_2 = 5 & n = 1 \end{array}$$

Ejemplo 2 II

- 4 La solución por tanto es de la forma

$$t_n = c_1(-1)^n + c_24^n.$$

- 5 Las condiciones iniciales dan

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 0 & n = 0 \\ -c_1 + 4c_2 &= 5 & n = 1\end{aligned}$$

- 6 Resolviendo estas ecuaciones obtenemos que $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$. Por lo tanto

$$t_n = 4^n - (-1)^n.$$

Raíces múltiples I

- La situación se vuelve un poco más complicada cuando el polinomio característico tiene múltiples raíces, es decir, cuando las k raíces no son todas distintas.

- Sigue siendo cierto que la Ecuación (2) satisface la recurrencia de cualquier valor de las constantes c_i , pero ésta ya no es la solución más general.

- Para encontrar otras soluciones, sea

$$p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

el polinomio característico de nuestra recurrencia, y sea r una raíz múltiple.

- Para encontrar otras soluciones, sea

$$p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

el polinomio característico de nuestra recurrencia, y sea r una raíz múltiple.

- Por definición de raíces múltiples, existe un polinomio $q(x)$ de grado $k - 2$ tal que $p(x) = (x - r)^2q(x)$.

Para cada $n \geq k$ considere los polinomios de n -ésimo grado

$$u_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} \text{ y}$$

$$v_n(x) = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)x^{n-k}.$$

Para cada $n \geq k$ considere los polinomios de n -ésimo grado

$$u_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} \text{ y}$$

$$v_n(x) = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)x^{n-k}.$$

Observe que $v_n(x) = x \times u'_n(x)$, donde $u'_n(x)$ denota la derivada de $u_n(x)$ con respecto de x .

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de x es

$$u_n'(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de x es

$$u'_n(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Por lo tanto $u'_n(r) = 0$, lo cual implica que $v_n(r) = r \times u'_n(r) = 0$ para todo $n \geq k$.

Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de x es

$$u'_n(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Por lo tanto $u'_n(r) = 0$, lo cual implica que $v_n(r) = r \times u'_n(r) = 0$ para todo $n \geq k$.
- En otras palabras,

$$a_0nr^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \dots + a_k(n-k)r^{n-k} = 0.$$

Raíces múltiples III

- Pero $u_n(x)$ se puede reescribir como

$$u_n(x) = x^{n-k}p(x) = x^{n-k}(x-r)^2q(x) = (x-r)^2 \times [x^{n-k}q(x)].$$

- Usando la regla para calcular la derivada de un producto de funciones, obtenemos que la derivada de $u_n(x)$ con respecto de x es

$$u'_n(x) = 2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]'.$$

- Por lo tanto $u'_n(r) = 0$, lo cual implica que $v_n(r) = r \times u'_n(r) = 0$ para todo $n \geq k$.
- En otras palabras,

$$a_0nr^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \dots + a_k(n-k)r^{n-k} = 0.$$

Recuerde que $v_n(x) = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \dots + a_k(n-k)x^{n-k}$.

Raíces múltiples IV

- Concluimos que $t_n = nr^n$ también es una solución a la recurrencia.

- Ésta es una solución genuinamente nueva en el sentido de que no puede obtenerse eligiendo las constantes apropiadas c_i en la Ecuación (2).

- De manera más general, si la raíz r tiene multiplicidad m , entonces $t_n = r^n, t_n = nr^n, t_n = n^2r^n, \dots, t_n = n^{m-1}r^n$ son todas las soluciones distintas de la recurrencia.

- De manera más general, si la raíz r tiene multiplicidad m , entonces $t_n = r^n, t_n = nr^n, t_n = n^2r^n, \dots, t_n = n^{m-1}r^n$ son todas las soluciones distintas de la recurrencia.
- La solución general es una combinación lineal de estos términos y de los términos aportados por las otras raíces del polinomio característico.

Raíces múltiples V

- En resumen, si r_1, r_2, \dots, r_l son las l raíces distintas del polinomio característico y si sus multiplicidades son m_1, m_2, \dots, m_l , respectivamente, entonces

$$t_n = \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n$$

es la solución general de la Ecuación (1).

- Nuevamente, las constantes c_{ij} , $1 \leq i \leq l$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$, deben ser determinadas por las k condiciones iniciales.

- Existen esas k constantes porque $\sum_{i=1}^l m_i = k$ (la suma de las multiplicidades de las distintas raíces es igual al número total de raíces).

- Por simplicidad, normalmente etiquetaremos las constantes mediante c_1, c_2, \dots, c_k en lugar de utilizar dos índices.

Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescribimos la recurrencia.

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0.$$

Ejemplo 3

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescribimos la recurrencia.

$$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-3} = 0.$$

Su polinomio característico es

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 2)^2.$$

Ejemplo 3 II

Por lo tanto las raíces son $r_1 = 1$ de multiplicidad $m_1 = 1$ y $r_2 = 2$ de multiplicidad $m_2 = 2$ y la solución general es

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n.$$

Las condiciones iniciales dan

$$c_1 + c_2 = 0 \quad n = 0$$

$$c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1 \quad n = 1$$

$$c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2 \quad n = 2$$

Solucionando estas ecuaciones obtenemos $c_1 = -2$, $c_2 = 2$ y $c_3 = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto la solución de la recurrencia es

$$t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2.$$

Ejercicios I

Resuelva las siguientes recurrencias:

1

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ 5t_{n-1} - 6t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2

$$t_n = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \\ 8 & \text{si } n = 1 \\ 4t_{n-1} - 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ -4t_{n-1} - 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicios II

4

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 4 & \text{si } n = 1 \\ 4t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5

$$t_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ 6 & \text{si } n = 1 \\ t_{n-1} + 6t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6

$$t_n = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 0 \\ -3 & \text{si } n = 1 \\ -6t_{n-1} - 9t_{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

7

$$t_n = \begin{cases} 9n^2 - 15n + 106 & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ t_{n-1} + 2t_{n-2} - 2t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

8

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ t_{n-1} + t_{n-3} - t_{n-4} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$t_n = at_{n-1}$$

$$t_n - at_{n-1} = 0$$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

$$t_n = c_1 a^n$$

$$c_1 a^0 = t_0 \quad n = 0$$

$$c_1 = t_0$$

$$t_n = t_0 a^n$$